ΠΡΟΤΑΣΗ

Σε ένα τ.χ $(E, \mathcal{T})$ τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

i) $(E, \mathcal{T})$ ομαλός

ii) $(\forall x \in E)(\forall U \in \mathcal{N}_x)(\exists V \in \mathcal{N}_x)\ V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

iii) $(\forall x \in E)$ $\exists$ βάση $\mathcal{B}_x$ του $\mathcal{N}_x$ με στοιχεία $\mathcal{B}_x$ κλειστά σύνολα

iv) $(\forall x \in E)(\forall K_{\text{κλειστό}} \subseteq E,\ \overline{K} \not\ni x)(\exists V \in \mathcal{N}_x) : \overline{V} \cap K = \emptyset$

Απόδειξη

$(i \Rightarrow ii)$ Έστω $x \in E$ και $U \in \mathcal{N}_x$

Τότε $U^{o} \in \mathcal{N}_x$ $(\Rightarrow x \in U^{o})$

$x \notin (U^{o})^{c} \leftarrow$ κλειστό

Όπως $(E, \mathcal{T})$ ομαλός $\Rightarrow (\exists A, B \in \mathcal{T}) : x \in A,\ (U^{o})^{c} \subseteq B \wedge A \cap B = \emptyset$

Τότε $A \subseteq B^{c}$ όπου θέτουμε $A = V \in \mathcal{N}_x$ και επομένως

$\overline{V} = \overline{A} \subseteq \overline{B^{c}} \overset{\text{κλειστό}}{=\!=} B^{c} \subseteq U^{o} \subseteq U$

$(ii \Rightarrow iii)$ Προφανές αφού $\overline{V}$ κλειστό και $\overline{V} \subseteq U$ τότε θα $\exists$ βάση του $\mathcal{N}_x$ με στοιχεία κλειστά σύνολα

$(iii \Rightarrow iv)$ Ας είναι $x \in E$ και $\overline{K}$ κλειστό, $x \notin K$ τότε από την (iii) και $x \notin K$ (διότι $x \in K^{c} \in \mathcal{T}$) και αφού $K^{c} \in \mathcal{N}_x$ το συμπέρασμα μας είναι ότι

$\exists$ V κλειστό $\in \mathcal{N}_x$ ώστε $V \subseteq K^{c} \Rightarrow V \cap K = \emptyset \overset{V \text{ κλειστ}}{\Longrightarrow} \overline{V} \cap K = \emptyset$

$(iv \Rightarrow i)$ Θεωρούμε $x \in E$ $\wedge$ K κλειστό, $x \notin K$

τότε από την (iv) $\Rightarrow (\exists V \in \mathcal{N}_x) : \overline{V} \cap K = \emptyset \Rightarrow K \subseteq \overline{V}^{c}$ (*)

θεωρώ $A = V^{o} \in \mathcal{N}_x \Rightarrow x \in A = V^{o}$ και $B = (\overline{V})^{c} \overset{(*)}{\Longrightarrow} K \subseteq B$ (**)

Τότε από (*), (**) $A \cap B = V^{o} \cap \overline{V}^{c} \subseteq \overline{V} \cap (\overline{V})^{c} = \emptyset$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Σε ένα τ.χ $(E,\mathcal{T})$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

i) $(E,\mathcal{T})$ κανονικός

ii) $(\forall F_1^{\neq\phi}, F_2^{\neq\phi}$ κλειστά $\subseteq E$, $F_1 \cap F_2 = \phi)(\exists V \in \mathcal{T})$ $F_1 \subseteq V$ και $\overline{V} \cap F_2 = \phi$

iii) $(\forall F_1^{\neq\phi}, F_2^{\neq\phi}$ κλειστά $\subseteq E$, $F_1 \cap F_2 = \phi)(\exists A, B \in \mathcal{T})$: $F_1 \subseteq A$, $F_2 \subseteq B \wedge \overline{A} \cap \overline{B} = \phi$

Απόδειξη

(iii ⇒ i): Προφανές διότι το iii "ισχυρότερο" του i

(i ⇒ ii): Είχαμε δείξει ότι ισχύει η πρόταση:

Ένας χώρος είναι κανονικός $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall F, H \quad F \subseteq H, F \text{ κλειστό } \& H \text{ ανοιχτό} \\ \exists G \in \mathcal{T} : F \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq H \end{cases}$

Ας είναι $F_1, F_2 \neq \phi$ κλειστά $\subseteq E$, $F_1 \cap F_2 = \phi$. Άρα, $F_1 \subseteq F_2^c$ τότε $\exists V \in \mathcal{T}$: $F_1 \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq F_2^c$.

Συνεπώς, $F_1 \subseteq V$ και $\overline{V} \cap F_2 = \phi$

(ii ⇒ iii): Ας είναι F_1, F_2 κλειστά, $F_1 \cap F_2 = \phi$ τότε από την (ii) ⇒ $(\exists V \in \mathcal{T})$: $F_1 \subseteq V$ και $\overline{V} \cap F_2 = \phi$ με $\overline{V}$ και F_2 κλειστά και $\overline{V} \cap F_2 = \phi \xrightarrow{(ii)} (\exists U \in \mathcal{T})$ $F_2 \subseteq U$ και $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$ τότε δ.ο. σύνολα $U, V \in \mathcal{T}$ με $F_1 \subseteq V$ και $F_2 \subseteq U$ και $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$(E,\mathcal{T})$ ομαλός $\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in E) \ \forall K \text{ κλειστό με } x \notin K \\ (\exists A, B \in \mathcal{T}) \ x \in A, K \subseteq B \text{ και } \overline{A} \cap \overline{B} = \phi \end{cases}$

Απόδειξη

(⇐) Προφανές από την παραπάνω πρόταση

(⇒): Έστω $(E,\mathcal{T})$ ομαλός και έστω $x \in E$, K κλειστό $x \notin K$

Όντας ομαλός ο χώρος $E \Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T})$: $x \in U$, $K \subseteq V$ και $U \cap V = \phi$

από το (ii) της παραπάνω πρότασης $(\exists W \in \mathcal{N}_x)$ $\overline{W} \subseteq U$

Έστω $x \in A = W^o \in \mathcal{N}_x$, $W^o \subseteq \overline{W} \subseteq U$ και $B = V \Rightarrow K \subseteq B$

$B = V \xRightarrow{V \cap U = \phi} B = V \subseteq U^c \Longrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{U^c} = U^c$ αφού U και

$A = W^o \Rightarrow \overline{A} = \overline{W^o} \subseteq \overline{W} \subseteq U$ τότε $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq U \cap U^c = \phi$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $(E_1,\mathcal{T}_1)$, $(E_2,\mathcal{T}_2)$ και $f, g: E_1 \longrightarrow E_2$ συνεχείς, $(E_2,\mathcal{T}_2) \in T_2$ D πυκνό με $f|_D = g|_D$ τότε $f = g$.

Απόδειξη

$\bar{D} = E_1$ και $x \in E_1 \Rightarrow x \in \bar{D} \Rightarrow \exists$ δίκτυο $(x_a)_{a\in A}$ εν D ; $x_a \to x$

Τότε $f(x_a) \to f(x)$ (f συνεχής)

$f(x_a)_{a\in A}$ εν E_2 και $g(x_a)_{a\in A}$ εν E_2

καθώς $f(x_a) \xrightarrow{f|_D = g|_D} g(x_a) \xrightarrow{\text{συνεχ}} g(x)$

Δηλ. $g(x_a) \to f(x)$ και $g(x_a) \to g(x)$

αλλά επειδή $(E_2, \mathcal{J}_2) \in T_2$ τότε το όριο ορίζεται μονοσήμαντα άρα $f(x) = g(x)$

ΘΕΩΡΗΜΑ

$(E, \mathcal{J})$ ομαλός και Lindelöf $\Rightarrow$ $(E, \mathcal{J})$ κανονικός

Απόδειξη

A, B κλειστά και ξένα. Έστω $a \in A \xrightarrow{A\cap B = \emptyset} a \notin B$

Είδαμε προηγουμένως ότι

E ομαλός $\Leftrightarrow (\forall x \in E)(\forall K$ κλειστό, $x \notin K)(\exists V \in N_x)\ \bar{V} \cap K = \emptyset$

Τότε κάνοντας χρήση αυτής της πρότασης

$(\exists \underset{\text{ανοιχτό}}{U \in N_a})\ \bar{U} \cap B = \emptyset$. Έτσι, θεωρούμε τη συλλογή

$\mathcal{C} = \{ \underset{\text{ανοιχτό}}{U \in N_a} \mid \bar{U} \cap B = \emptyset,\ a \in A \} \Rightarrow A \subseteq \cup \mathcal{C}$

A^c ανοιχτό

$\mathcal{C} \cup \{A^c\}$ ανοιχτή κάλυψη του $E \xrightarrow{(E,\mathcal{J}) \in \mathcal{L}} \exists$ c.n.a υποκάλυψη της $\mathcal{C} \cup \{A^c\}$. Έστω αυτή $\{U_1, U_2, \ldots\} \cup \{A^c\}$

Άρα, $\{U_1, U_2, \ldots\}$ c.n.a κάλυψη του A ($\bar{U_i} \cap B = \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots$)

ομοίως προκύπτει $\{V_1, V_2, \ldots\}$ ανοιχτή κάλυψη του B

τ/ω $\bar{V_i} \cap A = \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots$

Θεωρούμε $S_1 = U_1$ και $T_1 = V_1 - \bar{S_1}$

$S_2 = U_2 - \bar{T_1}$, $T_2 = V_2 - \overline{S_1 \cup S_2}$

$S_3 = U_3 - \overline{T_1 \cup T_2}$, $T_3 = V_3 - \overline{S_1 \cup S_2 \cup S_3}$

$\vdots$

$S_\nu = U_\nu - \overline{T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_{\nu-1}}$, $T_\nu = V_\nu - \overline{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_\nu}$

Στόχος μας να πάρουμε ως $S = \bigcup_\nu S_\nu$ και $T = \bigcup_\nu T_\nu$

όπου $A \subseteq S$ και $B \subseteq T$ και μάλιστα $S \cap T = \emptyset$

$S \cap T = (\bigcup_\nu S_\nu) \cap (\bigcup_\nu T_\nu) =$

$= (S_1 \cap T_1) \cup (S_1 \cap T_2) \cup \ldots \cup (S_2 \cap T_1) \cup (S_2 \cap T_2) \cup \ldots$

αρκεί νδο καθε ένα από αυτά τα οποία είναι το κενό ώστε $S \cap T = \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset = \emptyset$

Ισχυρίζομαι, $(\forall i)$ το S_i δεν περιέχει κανένα στοιχείο του συνόλου $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{i-1}$. Επίσης $(\forall i)$ T_i δεν περιέχει κανένα στοιχείο του συνόλου $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$

Έστω:

$$x \in S_i \cap T_j \begin{cases} i=j & \text{Άτοπο άρα } S_i \cap T_j = \emptyset \\ i<j & \text{Άτοπο δεν υφίσταται} \\ i>j & \text{Άτοπο '' ''} \end{cases} \Rightarrow S_i \cap T_j = \emptyset$$

Έστω στοιχείο $\alpha \in A \Rightarrow (\exists j)\ \alpha \in U_j$ ⊛

Ισχύει $\overline{V_i} \cap A = \emptyset$, $\forall i \Rightarrow (\forall i)\ \alpha \notin \overline{V_i} \Rightarrow \alpha \notin \overline{V_1} \cup \dots \cup \overline{V_{j-1}}$

$T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{j-1} \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_{j-1} = \overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_{j-1}}$

Άρα, το $\alpha \notin T_1 \cup \dots \cup T_{j-1} \xRightarrow{\alpha \in U_j} \alpha \in U_j - T_1 \cup \dots \cup T_{j-1} = S_j$

όμοια και για το $B \subseteq T$.

ΠΡΟΤΑΣΗ / ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω $(E_1, \mathcal{T}_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ τ.χ. και $(E_2, \mathcal{T}_2) \in T_2$

$f, g : E_1 \to E_2$. Νδο $A = \{x \in E_1 : f(x) = g(x)\}$ κλειστό

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $x \in A^c \Rightarrow f(x) \neq g(x) \xRightarrow{E \in T_2} (\exists\ G, H \text{ εν } \mathcal{T}_2) : f(x) \in G,\ g(x) \in H,\ G \cap H = \emptyset$

Θεωρώ τώρα το σύνολο $f^{-1}(G) \cap g^{-1}(G)$ εν E_1 όπου

$y \in f^{-1}(G) \cap g^{-1}(G)$ και ανοιχτό διότι f συνεχής και $G, H \in \mathcal{T}_2$

αρκεί νδο $f^{-1}(G) \cap g^{-1}(G) \subseteq A^c$

$f(f^{-1}(G) \cap g^{-1}(H)) = f(f^{-1}(G)) \cap f(g^{-1}(H)) \subseteq G \cap f(g^{-1}(H)) \subseteq G$

$g(f^{-1}(G) \cap g^{-1}(H)) = \dots\dots \subseteq H$

Άρα, $f(\underbrace{f^{-1}(G) \cap g^{-1}(H)}_{f(x) \in}) \cap g(\underbrace{f^{-1}(G) \cap g^{-1}(H)}_{g(y) \in}) = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow f(y) \neq g(y) \Rightarrow y \in A^c$.